

TD 3: Particule dans un potentiel constant par morceaux

1 Puits quantiques

On s'intéresse au cas d'une particule d'énergie E piégée dans un puits de potentiel de hauteur $V_0 > E$. Ce puits est décrit par un potentiel constant par morceaux :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x < -L/2 & \text{zone I;} \\ 0 & \text{si } -L/2 \leq x \leq L/2 & \text{zone II;} \\ V_0 & \text{sinon.} & \text{zone III} \end{cases} \quad (1)$$

1.1 Généralités

- Donner des exemples physiques de réalisations d'un puits quantique (non nécessairement carré).

Correction

Au sein de l'atome, le potentiel subi par un électron en fonction de la distance est en forme de puits, tout comme le potentiel subi par un nucléon au sein du noyau.

Au-delà de ces exemples, on trouve souvent des puits quantiques dans les semi-conducteurs. En créant une interface entre deux matériaux différents, on a souvent une zone de transition avec un puits (généralement triangulaire). Ce phénomène de piégeage est utilisé dans les LED, les diodes lasers, les lasers à cascade quantique, etc.

- Écrire l'équation aux valeurs propres vérifiée par une fonction propre $\varphi(x)$ dans chaque région de l'espace.

Correction

On s'intéresse aux fonctions propres du hamiltonien, donc vérifiant $H\psi = E\psi$. L'évolution temporelle de cette fonction est très simple : $\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est la fonction d'onde initiale. C'est cette fonction que l'on cherche à déterminer.

Le hamiltonien H étant différent dans les zones I/III et II, on a :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''_{I/III} + V_0 \varphi_{I/III} = E \varphi_{I/III} \quad \text{et} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''_{II} = E \varphi_{II}$$

- Résoudre ces équations. On posera

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad K^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}. \quad (2)$$

Correction

La fonction d'onde s'écrit dans chacune des zones :

$$\varphi(x) = \begin{cases} C e^{Kx} & \text{zone I;} \\ A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{zone II;} \\ D e^{-Kx} & \text{zone III} \end{cases}$$

où l'on a déjà éliminé certaines solutions non physiques : celles qui divergeaient en s'éloignant du puits

de potentiel (si elles divergent, $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 dx = \infty$ et elles ne sont donc pas normalisables).

4. Quelles conditions vérifient la fonction d'onde aux points de raccordement $x = -L/2$ et $x = L/2$? En déduire quatre équations sur les coefficients indéterminés de φ .

Correction

La fonction d'onde est une fonction toujours continue. On a donc deux conditions de raccordement aux bords. De plus, la dérivée de la fonction d'onde est aussi continue, sauf dans le cas où le potentiel extérieur diverge en un point donné de l'espace. Dans cette dernière condition, on remplace la relation de continuité de φ' par la non-pénétration stricte de φ dans la zone de potentiel infinie (donc $\varphi = 0$ dans cette zone).

Dans le cas d'un puits fini, les équations de continuité s'écrivent en $x = -L/2$ et $x = +L/2$, à gauche pour φ et à droite pour sa dérivée :

$$\begin{cases} C e^{-KL/2} = A e^{-ikL/2} + B e^{+ikL/2} \\ A e^{+ikL/2} + B e^{-ikL/2} = D e^{+KL/2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} K C e^{-KL/2} = ik(A e^{-ikL/2} - B e^{+ikL/2}) \\ ik(A e^{+ikL/2} - B e^{-ikL/2}) = -K D e^{+KL/2} \end{cases}$$

5. Dans cette question, on se place dans le cas d'un puits infini ($V_0 = \infty$). Donner l'expression de la fonction d'onde dans ce cas. Quelles sont les énergies E_n accessibles à la particule ?

Correction

Dans le cas du puits infini, les conditions aux limites de la dérivée disparaissent, et les conditions de continuité sont remplacées par $\varphi(x = \pm L/2) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} A e^{-ikL/2} + B e^{+ikL/2} = 0 \\ A e^{+ikL/2} + B e^{-ikL/2} = 0 \end{cases}$$

Ces deux conditions se réécrivent $A = -B e^{\pm ikL}$. En multipliant ces deux relations, on obtient $A^2 = B^2$. On a alors deux sous-cas :

- Si $A = B$, les relations de continuité imposent $\cos \frac{kL}{2} = 0$, donc $k = (2n + 1)\pi/L$ avec $n \in \mathbb{N}$. La fonction d'onde obtenue s'écrit $\phi(x) = A \cos(k_{2n+1}x)$, et est donc paire.
- Si $A = -B$, les relations de continuité imposent cette fois $\sin \frac{kL}{2} = 0$, donc $k = 2n\pi/L$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction d'onde obtenue s'écrit $\phi(x) = A \sin(k_{2n}x)$, et est donc impaire.

Les énergies accessibles sont les $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ avec $k_n = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}^*$. Les k_n étant alternativement issus des solutions paires et impaires, la symétrie de la fonction d'onde est alternativement paire et impaire. Le premier vecteur d'onde correspond à un état pair ($k = \pi/L$), l'état fondamental est $\varphi(x) = A \cos(\pi x/L)$, A étant déterminé par la normalisation de la fonction d'onde.

6. Ordonner selon vous les énergies propres dans le cas du puits infini et du puits fini.

Correction

Le puits infini impose un confinement plus stricte à la fonction d'onde qu'un puits fini, puisque dans ce dernier cas la fonction d'onde peut pénétrer un peu dans les zones I et III. Or avec l'inégalité d'Heisenberg, confiner une particule montre que ça augmente la variance de la distribution d'impulsions ($\Delta x \Delta p \geq \hbar/4$). Augmenter Δp augmente l'énergie de la particule. On devine par ce raisonnement que les énergies propres vérifient $E_n^{\text{fini}} < E_n^{\text{infini}}$.

Résoudre le cas du puits fini peut être fastidieux, mais une propriété de symétrie du hamiltonien justifie qu'on puisse chercher les fonctions comme symétriques ou antisymétriques.

1.2 États pairs

7. Justifier qu'on peut rechercher des fonctions propres étant soit paires soit impaires.

Correction

$V(x)$ est une fonction paire, donc le hamiltonien H a cette symétrie. Si Π est l'opérateur de parité, on a $[H, \Pi] = 0$. On peut donc co-diagonaliser H et Π , ce qui signifie qu'on peut trouver une base d'états qui sont propres à la fois pour H et Π , donc des fonctions propres de H qui sont paires ou impaires.

8. Dans la suite, on recherchera des solutions paires. Montrer qu'un état pair d'énergie E vérifie

$$k \tan\left(\frac{kL}{2}\right) = K. \quad (3)$$

Correction

Si on cherche des états pairs, on a $A = B$ et $C = D$. Les conditions de continuité à l'interface $x = +L/2$ s'écrivent :

$$\begin{cases} A(e^{+ikL/2} + e^{-ikL/2}) = D e^{+KL/2} \\ ikA(e^{+ikL/2} - e^{-ikL/2}) = -K D e^{+KL/2} \end{cases} \implies \frac{2 \cos(kL/2)}{ik(2i \sin(kL/2))} = -1/K$$

d'où le résultat recherché.

9. On pose $u = kL/2$ et $W = K_0L/2$ où $K_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$. En décomposant W^2 , trouver une équation implicite vérifiée par u . Résoudre de façon graphique l'équation obtenue.

Correction

On peut écrire :

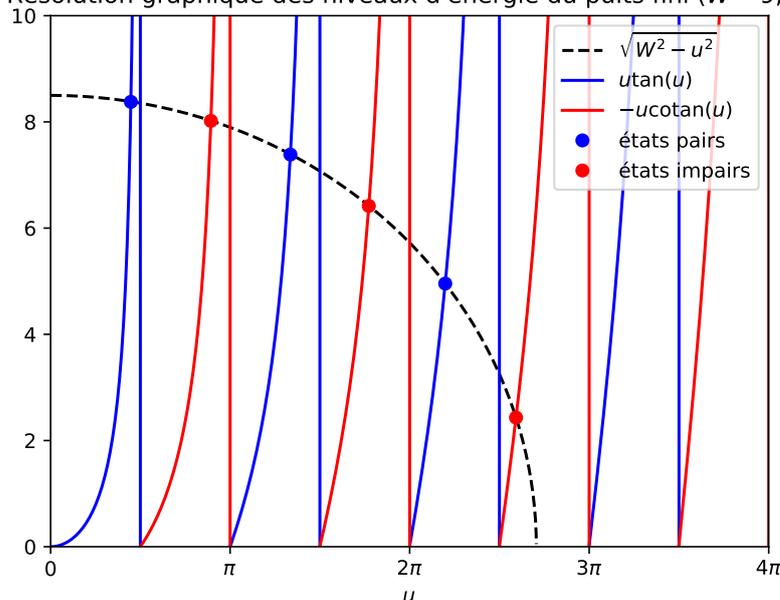
$$W^2 = \frac{K_0^2 L^2}{4} = \frac{(K^2 + k^2)L^2}{4} = \frac{K^2 L^2}{4} + u^2 = u^2 \tan^2(u) + u^2$$

Soit : $u \tan u = \sqrt{W^2 - u^2}$. Il s'agit d'une équation implicite sur u , qu'on peut résoudre numériquement ou graphiquement en regardant l'intersection entre les courbes $u \tan u$ et $\sqrt{W^2 - u^2}$.

On peut montrer que les solutions impaires vérifient l'équation implicite $-u \cotan u = \sqrt{W^2 - u^2}$.

On note que W est le rayon du quart de disque de la figure ci-dessous.

Résolution graphique des niveaux d'énergie du puits fini ($W = 9,5$)



1.3 Cas limite du puits infini

10. Sur le graphique précédent, représenter le cas où $V_0 \gg E$. Que remarque-t-on sur les énergies propres du cas fini et infini ?
11. Montrer que ce résultat était attendu qualitativement à l'aide de l'inégalité d'Heisenberg.

Correction

Dans le cas fini, l'onde pénètre sur une distance $1/K$ supplémentaire, donc est moins contrainte par l'inégalité d'Heisenberg.

2 Double puits quantique asymétrique

On s'intéresse maintenant au couplage entre deux puits carrés de largeur différentes (Fig. 1). On prendra dans la suite $L_d = \frac{3}{2}L_g$. Il est possible d'appliquer un champ électrique entre les deux puits, et on admettra qu'en première approximation, celui-ci a pour effet de décaler les niveaux d'énergie d'un deux deux puits d'une énergie $eE\ell$ avec ℓ la distance entre les centres des puits.

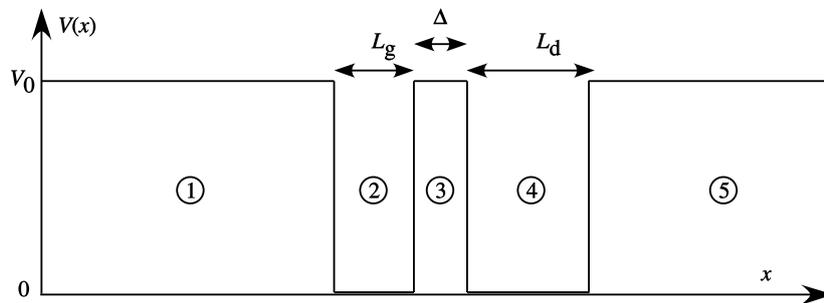
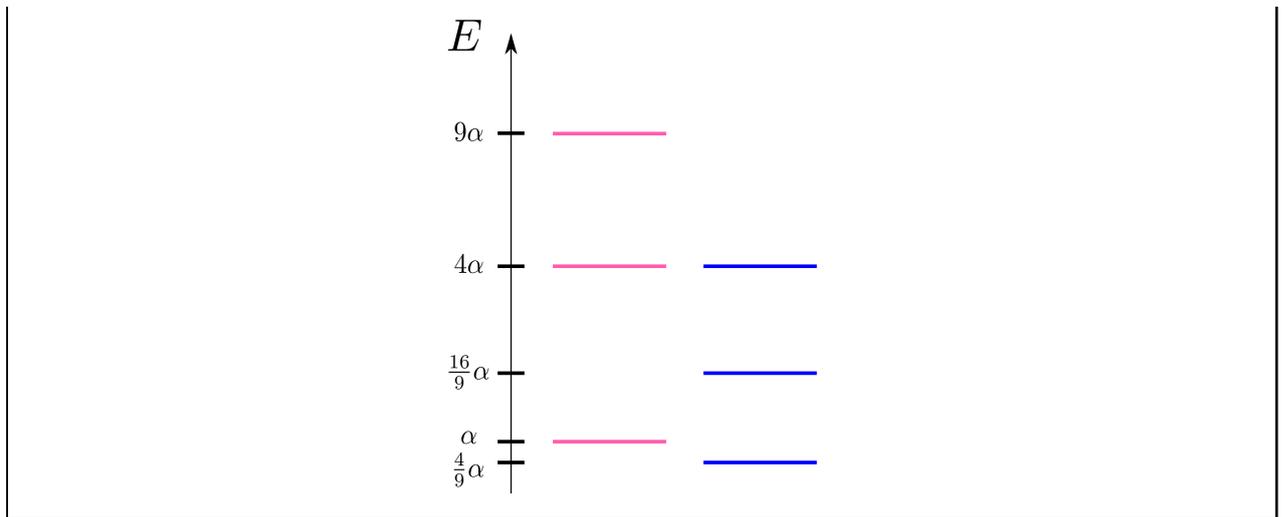


FIGURE 1 – Potentiel créé par un double puits quantique asymétrique.

12. On se place d'abord dans le cas $V_0 = \infty$. Tracer le diagramme énergétique avec les six premiers niveaux du système. On notera $\alpha = \hbar^2\pi^2/2mL_g^2$. Préciser pour chaque niveau le puits dans lequel l'état est localisé.

Correction

On suppose $V_0 = \infty$, donc les deux puits quantiques sont totalement découplés. D'après l'exercice précédent, on sait que les niveaux d'énergie d'un puits infini de largeur L sont les $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$. Avec la définition de α , les niveaux sont donc $E_n^g = \alpha n^2$ dans le puits de gauche (successivement $\alpha, 4\alpha, 9\alpha$, etc.) et $E_n^d = \frac{4}{9}\alpha n^2$ (successivement $\frac{4}{9}\alpha, \frac{16}{9}\alpha, 4\alpha$, etc.) On peut donc tracer le diagramme suivant (en rose les états du puits de gauche, en bleu ceux du puits de droite) :



13. Quel champ électrique devrait-on appliquer sur le système pour que l'état fondamental soit dégénéré? On prendra $L_g = 10 \text{ nm}$ et $\Delta = 3 \text{ nm}$.

Correction

Pour que l'état fondamental soit dégénéré, il faut remonter les niveaux du puits de droite d'une quantité $\delta E = \alpha - \frac{4}{9}\alpha = \frac{5}{9}\alpha$. La distance entre les centres des puits valant $\ell = \Delta + \frac{L_g}{2} + \frac{3L_g}{4} = \Delta + \frac{5}{4}L_g = 15,5 \text{ nm}$. On demande donc un champ électrique $E = \frac{5\alpha}{9e\ell}$. Numériquement :

$$\alpha = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL_g^2} = \frac{10^{-68} \times 9,5}{2 \times 9 \cdot 10^{-30}} = 0,5 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad \text{d'où} \quad E = \frac{5 \times 0,5 \cdot 10^{-21}}{9 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 15,5 \cdot 10^{-9}} = 1 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

soit un champ électrique de qqk kV/cm.

14. Décrire l'évolution du diagramme énergétique lorsqu'on passe d'un V_0 infini à une valeur finie.

Correction

Si le potentiel V_0 devient fini, la fonction d'onde dans chaque puits peut pénétrer dans les barrières de potentiel. Si V_0 reste très élevé, la longueur de pénétration $1/K$ est très petite devant Δ , et les puits restent découplés. Cependant il y a un abaissement des niveaux d'énergie dans chaque puits due à cette délocalisation possible. Il y a une levée de dégénérescence pour le niveau à 4α car l'abaissement des niveaux n'est pas le même dans les deux puits.

Si V_0 continue à diminuer, les deux puits vont pouvoir interagir : les états propres du système vont devenir délocalisés sur les deux puits. On a une hybridation des niveaux d'énergie.

3 Marche de potentiel

On revient au cas plus simple où le potentiel $V(x)$ est simplement une marche d'escalier (fonction de Heavisde), telle que

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

3.1 États stationnaires

15. Donner la forme générale des solutions $\varphi(x)$ en séparant les cas $E > V_0$ et $E < V_0$. On introduira k et K comme dans l'exercice précédent.

Correction

On sépare l'espace en deux régions $x < 0$ et $x > 0$. En écrivant l'équation aux valeurs propres dans les deux situations, on trouve

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + E \varphi_- = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + (E - V_0) \varphi_+ = 0 \quad (5)$$

On peut exclure le cas où $E < 0$ qui ne permettrait pas à la particule de se trouver dans cette marche de potentiel. Alors, $\varphi_-(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. La fonction en $+ikx$ représente l'onde incidente, alors que celle en $-ikx$ représente l'onde réfléchie sur la barrière.

3.1.1 Cas $E > V_0$

16. Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude \underline{r} et \underline{t} .

Correction

Dans ce cas, l'équation vérifiée par φ_+ est similaire à celle vérifiée par φ_- , en remplaçant k^2 par $K^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$. On peut cependant ne pas prendre en compte la solution en $-iKx$ si on suppose qu'aucune onde ne provient de $x = +\infty$. Ainsi $\varphi_+(x) = Ce^{iKx}$.

Par définition,

$$\underline{r} = \frac{\text{Ampl. réfléchie}}{\text{Ampl. incidente}} = \frac{B}{A} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{\text{Ampl. transmise}}{\text{Ampl. incidente}} = \frac{C}{A} \quad (6)$$

Pour déterminer les relations entre A , B et C , on écrit les relations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$ (la dérivée étant continue puisque le potentiel ne subit pas une discontinuité infinie) :

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = iKC \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \frac{K}{k} \underline{t} \end{cases} \quad (7)$$

Ainsi

$$\underline{r} = \frac{k - K}{k + K} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k}{k + K} \quad (8)$$

17. Rappeler la définition des coefficients en intensité, et les calculer, toujours dans le cas $E > V_0$. Donner un équivalent optique de cette situation.

Correction

La définition des coefficients de réflexion et de transmission en intensité se fait à l'aide du courant de probabilité d'un état φ : $\vec{j}_\varphi = \frac{i\hbar}{2m} (\varphi \vec{\nabla} \varphi^* - \varphi^* \vec{\nabla} \varphi) = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\varphi^* \vec{\nabla} \varphi)$:

$$R = \frac{|j_r|}{j_i} \quad \text{et} \quad T = \frac{j_t}{j_i} \quad (9)$$

Pour une onde plane $\varphi = Ae^{ikx}$, on montre que le vecteur densité de courant s'écrit : $\vec{j} = |A|^2 \vec{v}_\varphi = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |A|^2$ (expression habituelle d'un vecteur densité de flux d'une quantité physique, qui serait ici le module carré de la fonction d'onde). On trouve ainsi

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = |\underline{r}|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{K}{k} \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{K}{k} |\underline{t}|^2 \neq |\underline{t}|^2. \quad (10)$$

On peut facilement vérifier que $R + T = 1$. Il s'agit de l'interaction entre une onde et une interface,

très classique en optique lorsqu'on change d'indice optique, mais aussi en électronique, acoustique, mécanique des fluides lors d'un changement d'impédance du milieu.

3.1.2 Cas $E < V_0$

18. On se place dans le cas $E < V_0$. Calculer à nouveau les coefficients de réflexion en amplitude et en intensité.

Correction

Dans cette situation, l'onde dans la partie $x > 0$ est une fonction réelle, et r est un nombre complexe. Vue la définition du vecteur densité de courant comme une partie imaginaire, celui-ci est strictement nul pour une fonction d'onde réelle. On trouve donc $T = 0$ et $R = 1 - T = 1$. Toute l'énergie de l'onde est réfléchie.

19. Montrer que le rapport des amplitudes des ondes incidente $A_i(k)$ et réfléchie $A_r(k)$ au vecteur d'onde k peut s'écrire

$$\frac{A_r(k)}{A_i(k)} = e^{-2i\theta(k)} \quad \text{avec} \quad \tan \theta(k) = \sqrt{\frac{K_0^2}{k^2} - 1} \quad \text{et} \quad K_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}. \quad (11)$$

Correction

Soit $\tilde{K}^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$, on montre de la même façon que dans la partie précédente

$$r = \frac{k - i\tilde{K}}{k + i\tilde{K}} = e^{-2i\theta(k)} \quad (12)$$

où $\theta(k)$ est l'argument du nombre complexe $k + i\tilde{K}$, et peut donc s'écrire

$$\tan \theta(k) = \frac{K}{k} = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)/\hbar^2}{2mE/\hbar^2}} = \sqrt{\frac{K_0^2}{k^2} - 1} \quad (13)$$

Si l'énergie est totalement réfléchie, l'amplitude de l'onde subit un déphasage de $-2\theta(k)$ qui dépend de l'importance relative entre k et \tilde{K} . Dans le cas d'une haute barrière $V_0 \gg E$, $r \approx \frac{-i\tilde{K}}{i\tilde{K}} = -1$. L'onde subit un déphasage de π (classique également en optique).

3.2 Bonus : Étude dynamique d'un paquet d'onde

Les états stationnaires, bien que fonctions propres du hamiltonien, ne sont pas des états physiques, puisqu'ils ne sont pas normalisables. Une particule est représentée par un paquet d'onde, superposition linéaire de tels états stationnaires centrée sur un vecteur d'onde k_0 incident, et d'élargissement $\Delta k \ll k_0$. Une particule incidente arrive sur la marche de potentiel de la gauche vers la droite.

3.2.1 Cas $k_0 + \Delta k \leq K_0$

Dans cette situation, toutes les OPPH composant le paquet d'onde sont dans le cas $E < V_0$.

20. À partir des résultats de la partie précédente, écrire la fonction d'onde du paquet d'onde $\psi(x, 0)$ puis $\psi(x, t)$ pour tout $x < 0$ comme la somme de deux intégrales sur k .

Correction

Le paquet d'onde est une superposition des états stationnaires du hamiltonien ($A_i e^{ikx} + A_r e^{-ikx}$), modulée par une fonction $g(k)$ piquée en k_0 . Ainsi, en $x < 0$, on peut écrire à $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) \left[e^{ikx} + e^{-2i\theta_k} e^{-ikx} \right] dk$$

Pour trouver l'évolution temporelle, on multiplie chaque état stationnaire par $e^{-iE_k t/\hbar}$, d'où :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int g(k) e^{-i(kx + 2\theta_k + \omega(k)t)} dk$$

21. La vitesse de groupe est définie par la dérivée de ω par rapport à k . Cependant, en faisant le calcul, on peut avoir une définition plus générale : il s'agit de la vitesse pour laquelle la phase du paquet d'onde est extrémale. Avec cette définition, calculer la vitesse de groupe des deux paquets d'ondes incident et réfléchi, ainsi que leur position en fonction du temps. Proposer une explication physique de ce résultat.

Correction

Pour le paquet d'onde incident, la phase est extrémale lorsque $d(kx - \omega t) = 0$, donc $x dk - d\omega t = 0$. On retrouve $v_g = \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk}$.

Pour le paquet d'onde réfléchi, on a $x dk + 2d\theta_k + d\omega t = 0$, qu'on peut réécrire :

$$x = -2 \frac{d\theta_k}{dk} - \frac{d\omega}{dk} t = -\frac{\hbar k_0}{m} t + \frac{2}{\sqrt{K_0^2 - k_0^2}}$$

Le paquet réfléchi se propage donc à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$ selon le sens opposé au paquet incident, avec une abscisse à l'origine inattendue $x_0 = -2 \frac{d\theta_k}{dk}$. Lors de la réflexion sur l'interface, qui se passe à $t = 0$, tout se passe comme si cette réflexion se faisait en un temps $\Delta t = \frac{2}{v_g} \frac{d\theta_k}{dk}$, au bout duquel le paquet réfléchi quitte l'interface.

3.2.2 Cas $k_0 - \Delta k \geq K_0$

Dans cette situation, toutes les OPPH composant le paquet d'onde vérifient $E > V_0$.

22. Écrire la fonction d'onde $\psi(x, t)$ comme une somme de trois paquets d'ondes.

Correction

On procède de la même façon que dans la partie précédente, en faisant la superposition d'états stationnaires (cette fois-ci une superposition de trois ondes planes). Pour avoir les parties $x < 0$ et $x > 0$ en même temps, on utilise la fonction de Heaviside $\Theta(x)$:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) \left[\Theta(-x) e^{ikx} + \Theta(-x) r(k) e^{-ikx} + \Theta(x) t(k) e^{iKx} \right] dk$$

Pour trouver l'évolution temporelle, on multiplie chaque état stationnaire par $e^{-iE_k t/\hbar}$, d'où :

$$\psi(x, t) = \frac{\Theta(-x)}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \frac{\Theta(-x)}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) r(k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk + \frac{\Theta(x)}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) t(k) e^{i(\sqrt{k^2 - K_0^2} x - \omega(k)t)} dk$$

23. Calculer leur position moyenne en fonction du temps. Comparer votre résultat à la sous-partie précédente.

Correction

On calcule les positions des paquets d'onde en fonction de la même façon que dans la partie précédente :

$$x_i = \frac{\hbar k_0}{m} t, \quad x_r = -\frac{\hbar k_0}{m} t, \quad x_t = \frac{\hbar \sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{m} t.$$

x_i et x_r sont bien définis lorsque lorsqu'ils sont dans la région $x < 0$, donc respectivement à $t < 0$ et $t > 0$.

Le paquet d'onde incident disparaît au profit du paquet réfléchi à $t = 0$.

x_t est bien défini si $x_t > 0$, donc à $t > 0$.

Contrairement au cas précédent, il n'y a pas de retard à la réflexion et à la transmission !

24. On suppose le paquet d'onde spectralement fin ($\Delta k \ll k_0$). Un développement limité de $\sqrt{k^2 - K_0^2}$ au voisinage de k_0 et au premier ordre permet de comparer le paquet d'onde incident au paquet d'onde transmis (on posera $q_0 = \sqrt{k_0^2 - K_0^2}$). Montrer que le paquet d'onde transmis est plus condensé dans l'espace réel, et que son amplitude est plus grande que celle du paquet d'onde incident.

Correction

Le développement limité du vecteur d'onde K donne :

$$K = \sqrt{k^2 - K_0^2} = \sqrt{k_0^2 - K_0^2} + (k - k_0) \left. \frac{d\sqrt{k^2 - K_0^2}}{dk} \right|_{k_0} = q_0 + (k - k_0) \frac{k_0}{q_0}$$

On peut écrire le paquet d'onde transmis

$$\psi_t(x, t) = e^{iq_0 x} t(k_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{i\left((k-k_0)\frac{k_0}{q_0}x - \omega(k)t\right)} dk$$

à comparer à

$$\psi_i(x, t) = e^{ik_0 x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{i((k-k_0)x - \omega(k)t)} dk$$

Et donc $|\psi_t(x, t)| = |t(k_0)| \left| \psi\left(\frac{k_0}{q_0}x, t\right) \right|$. On remarque deux choses :

- Le rapport des amplitudes est donné par $|t(k_0)|$, qui est supérieur à 1 (puisque $K > k$). Donc le paquet d'onde transmis est plus grand que le paquet d'onde incident.
- Si le paquet d'onde incident a une largeur Δx , le paquet d'onde transmis a une largeur $\frac{q_0}{k_0} \Delta x$, donc plus petite.
- Le coefficient de transmission en intensité T est le produit de ces deux facteurs :

$$T = \frac{q_0}{k_0} \times |t(k_0)|^2$$

Références

- [1] Cohen-Tannoudji et al., Mécanique quantique, Tome I, complément J_I.
 [2] Sujet d'examen par J. Dalibard